Title	Lie 環ノ derivation I.
Author(s)	吉田, 耕作
Citation	全国紙上数学談話会. 156 p.125-p.129
Issue Date	1938-03-17
oaire:version	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74616
rights	
Note	

Osaka University Knowledge Archive : OUKA

https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

Osaka University

690. Lie 環ノ derivation I.

吉田　耕作（阪大）

最初ニ Lie 環ノ定義ヲ與ヘテ置キマス：線狀空間 R ニ次ノ條件ヲ滿足スル乘法 $[x, y]$ ガ定義サレテ居ル時ニ R ヲ Lie 環ト呼ブ。

$$\begin{cases} [x, y] = -[y, x], \quad [x+y, z+w] = [x, z] + [x, w] + [y, z] + [y, w], \\ [\alpha x, \beta y] = \alpha\beta[x, y] \qquad (\alpha, \beta \text{ ハ scalar}) \\ [x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0 \end{cases}$$

R ノ任意ノ要素 x ハ $T_x \cdot y = [x, y]$ ナル如キ R ノ R 內ヘノ一次寫像 T_x ト induzieren スル。

$$T_x T_y \cdot z - T_y T_x \cdot z = [x, [y, z]] - [y, [x, z]] = [[x, y], z] = T_{[x, y]} \cdot z$$

ダカラ

$$(1) \quad [T_x, T_y] = T_x T_y - T_y T_x = T_{[x, y]}$$

從ッテ

Lemma 1. T_x ノ全体 $\mathfrak{A}_R$ ハ乘法 $[T_x, T_y]$ ニヨッテ Lie 環ヲ作リ且ツ $\mathfrak{A}_R$ ハ $R/\mathfrak{Z}$（$\mathfrak{Z}$ ハ R ノ核心）ニ同型デアル。

$$T_x \cdot [y, z] = T_x T_y \cdot z = T_{[x, y]} \cdot z + T_y T_x \cdot z$$
$$= [[x, y], z] + [y, [x, z]] = [T_x \cdot y, z] + [y, T_x \cdot z]$$

ガ成立スル。R ノ R 內ヘノ一次寫像 T ガ

$$(2) \quad T \cdot [y, z] = [T \cdot y, z] + [y, T \cdot z]$$

ヲ満足スルトキニ T ヲ R ノ derivation ト呼ブコトニスル。T, S ヲ共ニ R ノ derivation トスルト

$TS\cdot[y,z]=T\{[S\cdot y,z]+[y,S\cdot z]\}=[TS\cdot y,z]+[S\cdot y,T\cdot z]+[T\cdot y,S\cdot z]+[y,TS\cdot z]$ トナルカラ $[T,S]=TS-ST$ モ亦 R ノ derivation トナル。

Lemma 2. R ノ derivation T ノ全体 $\mathfrak{D}_R$ ハ乗法 $[T,S]$ ニヨッテ Lie 環ヲ作リ且ツ $\mathfrak{a}_R$ ハ $\mathfrak{D}_R$ ノ ideal デアル。

証. $T\in\mathfrak{D}_R$, $T_x\in\mathfrak{a}_R$ トセヨ。

$TT_x\cdot y=T\cdot[x,y]=[T\cdot x,y]+[x,T\cdot y]=T_{T\cdot x}\cdot y+T_xT\cdot y$ ヲ得ルカラ

(3) $[T,T_x]=T_{T\cdot x}$

之レハ $\mathfrak{a}_R$ ガ $\mathfrak{D}_R$ ノ ideal ナルコトヲ示ス。

以下ニハ R ノ係數ノ Körper ヲ実數又ハ複素數体トシ且ツ R ハ係數ノ Körper ニ對シテ finite rank ナリトスル。

斯カル R ガ準單純ト云フノハ可換 ideal $\neq 0$ ヲ含マヌコトデアリ、準單純ナ Lie 環ハ單純且ツ準單純ナ ideal ノ直和ニナル（E. Cartan ノ定理）。然ラバ

定理 I. R ガ準單純ナラバ

$$\mathfrak{D}_R=\mathfrak{a}_R$$

証. R ノ核心 $\mathfrak{Z}=0$ ダカラ Lemma 1 ニヨッテ $\mathfrak{a}_R$ ハ準單純デアル。ニツノ case ガ起リ得ル。

Case 1. $\mathfrak{D}_R$ ガ準単純ナル時. Lemma 2 ニヨリ $\mathfrak{a}_R$ ガ $\mathfrak{D}_R$ ノ ideal ダカラ $\mathfrak{D}_R = \mathfrak{a}_R + \mathfrak{D}_1$ (直和)。ideal $\mathfrak{D}_1 = 0$ ヲ示ストヨイ。

共通集合 $(\mathfrak{D}_1 \cdot \mathfrak{a}_R) = 0$ ダカラ $[T, T_x] = 0$ for $T \in \mathfrak{D}_1$, $T_x \in \mathfrak{a}_R$. ヨッテ (3) ニヨリ $T_{T \cdot x} = 0$。コレハ $T \cdot x = \mathfrak{z}$ for any $x \in R$ ヲ意味スル。$\mathfrak{z} = 0$ ダカラ $T = 0$, 即チ $\mathfrak{D}_1 = 0$

Case 2. $\mathfrak{D}_R$ ガ準単純デナイトスル。即チ $\mathfrak{D}_R$ ノ可換 ideal $\mathfrak{D}_1 \neq 0$ ガ存在スルトスル。$\mathfrak{D}_1$, $\mathfrak{a}_R$ 共ニ $\mathfrak{D}_R$ ノ ideal ダカラ $[T, T_x] \in (\mathfrak{D}_1 \cdot \mathfrak{a}_R)$ for $T \in \mathfrak{D}_1$, $T_x \in \mathfrak{a}_R$. 所ガ $(\mathfrak{D}_1 \cdot \mathfrak{a}_R)$ ハ $\mathfrak{D}_1$ ト共ニ可換且ツ $\mathfrak{a}_R$ ノ ideal ニナル。$\mathfrak{a}_R$ ガ準単純ダカラ $(\mathfrak{D}_1 \cdot \mathfrak{a}_R) = 0$. ヨッテ Case 1 ニ於ケルト同様ニシテ $\mathfrak{D}_1 = 0$ ヲ得ル。之ハ矛盾デアルカラ Case 2 ハ起リ得ナイ。斯クシテ

$$\mathfrak{a}_R = \mathfrak{D}_R. \qquad \text{以上。}$$

(注意) 上定理ハ Cartan ノ Thése P. 113 ノ結果カラモ導ケルノデアルガ, コノ Cartan ノ結果ハ相當面倒ナ計算ヲ俟ッテ得ラレタノデアルシ, 又ハ Cartan ハ differential operators ノ Lie 環ニツイテノミ議論シテ居ルノデ新証明?ヲシテ見タノデアリマス。

R ノ R 全体ヘノ一次寫像 $\overline{T}$ ガ

(4) $\overline{T} \cdot [y, z] = [\overline{T} \cdot y, \overline{T} \cdot z]$

ヲ満足スルトキニ $\overline{T}$ ヲ R ノ automorphism ト呼ブ。$\overline{T}$ ノ全体ハ群ヲ作ル, 之レヲ $\overline{\mathfrak{a}}_R$ ト書クコトニスル。一次

独立ナ基ヲ $\mathfrak{R}$ ニ撰ベバ $\overline{\mathfrak{A}}_{\mathfrak{R}}$ ヲ topologise デキル。即チ此ノ基ニ対シテハ $\overline{\mathrm{T}}$ ハ行列 $\|\bar{t}_{ij}\|$ デ映ヘラレルカラ

$|\overline{\mathrm{T}}| = \sqrt[2]{\sum_{i,j} |\bar{t}_{ij}|^2}$ デ $\overline{\mathrm{T}}$ ノ絶對値ト定義スレバ $\overline{\mathfrak{A}}_{\mathfrak{R}}$ ハ $|\overline{\mathrm{T}} - \overline{\mathrm{S}}|$ ナル距離ニヨッテ locally compact ナ topological group ニナル。$\overline{\mathfrak{A}}_{\mathfrak{R}}$ ノ infinitesimal operators T ハ

$$\begin{cases} \mathrm{T} = \lim_{i \to \infty} (\overline{\mathrm{T}}_i - \overline{\mathrm{E}}) / \varepsilon_i \\ \overline{\mathrm{T}}_i \in \overline{\mathfrak{A}}_{\mathfrak{R}}, \ \lim_{i \to \infty} \overline{\mathrm{T}}_i = \overline{\mathrm{E}} \ (\textit{identical automorphism}) \end{cases}$$

ε_i ハ $\lim_{i \to \infty} \varepsilon_i = 0$ ナル如キ實數列.

ノ如クシテ得ラレル $\mathfrak{R}$ ノ $\mathfrak{R}$ 内ヘノ一次寫像ノ全体デアル。

(4) カラ直グワカル如ク，斯カル inf. operator T ハ $\mathfrak{R}$ ノ derivation デアル。又逆ニ $\mathrm{T} \in \mathfrak{D}_{\mathfrak{R}}$ ナラ

$\overline{\mathrm{T}} = \exp \mathrm{T} = \overline{\mathrm{E}} + \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{T}^n / n!$ ガ

(5) $\quad \overline{\mathrm{T}} \cdot [y, z] = [\overline{\mathrm{T}} \cdot y, \overline{\mathrm{T}} \cdot z]$

ヲ満足スルコトガ (2) カラワカルカラ

定理 2. Lie 環 $\mathfrak{R}$ ノ automorphism group ノ infinitesimal operator 全体ハ $\mathfrak{D}_{\mathfrak{R}}$ ト一致スル。

次ニ $\mathfrak{G}$ ヲ Lie 群トシ $\overline{\overline{\mathrm{T}}}$ ヲ $\mathfrak{G}$ ノ continuous automorphism トセヨ。$\overline{\overline{\mathrm{T}}}$ ニヨッテ $\mathfrak{G}$ ノ one-parameter subgroup ハ又 $\mathfrak{G}$ ノ one-parameter subgroup ニ寫サレルコトカラ $\overline{\overline{T}}$ ハ $\mathfrak{G}$ ノ Lie 環 R ノ automorphism $\overline{T}$ ヲ induce シ，又 R ノ automorphism $\overline{T}$ ハ $\mathfrak{G}$ ノ continuous automorphism $\overline{\overline{T}}$ ヲ定義スル。又 $\mathfrak{G}$ ノ inner automorphisms $\{\overline{\overline{T}}\}$ ノ inf. operators ハ $\mathfrak{A}_R$ ニ一致スル。以上ハ良ク知ラレテ居ル事柄デス。

特ニ $\mathfrak{G}$ ヲ compact ナ Lie 群トスルト，Cartan ノ定理ニヨッテ $\mathfrak{G}$ ハ準單純ナ Lie Normalteiler $\mathfrak{G}_1$ ト compact ナ可換 Lie Normalteiler $\mathfrak{G}_2$ トノ直積ニナル（local ニ）。$\mathfrak{G}_2$ ハ toroidal group[1] ダカラ $\mathfrak{G}_2$ ノ cont. automorphism デ充分 identical automorphism ニ近イ奴ハ ident. auts. ニナルコトガ容易ニワカル。ヨッテ定理1及ビ2ニヨリ

定理3.（Cartan ノ定理）準單純又ハ compact ナ Lie 群 $\mathfrak{G}$ ノ cont. automorphism ノ群ハ ident. automorphism ノ近傍デハ $\mathfrak{G}$ ノ inner automorphism group ニ一致スル。

此ノ次ニハ定理1ノ二三ノ應用ヲ試ミタイト思ヒマス。

---

(1) 1 ヲ法トシタ實數ノ加法群有限個ノ直積.